11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

План:

1. Основные понятия

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Ключевые слова и словосочетания

Дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, дифференциальное уравнение n- *го порядка, решением дифференциального уравнения, общее решение, частное решение, интегрирование дифференциального уравнения, поле направлений, интегральная кривая, задача Коши, начальное условие, существование и единственность решения, общий интеграл уравнения, уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, динамическая функция предложения, особых точки, особые решения, линейное уравнение первого порядка, линейное однородное уравнение первого порядка, линейное неоднородное уравнение первого порядка, вариация произвольной постоянной, уравнение Бернулли*

1. Основные понятия

1.1. Дифференциальное уравнение и его порядок. До настоящего времени мы сталкивались с уравнениями вида $F(x)=0$, содержащими неизвестную величину x; задача заключалась в том, чтобы найти все значения величины x, удовлетворяющие заданному соотношению. Однако ряд важных задач – как самой математики, так и ее приложений – приводит к необходимости решать уравнения более сложного вида, где неизвестной является не величина x, а некоторая функция $y(x)$, причем в уравнение входят, наряду с x и $y(x)$, еще и производные $y', y'', y''',...$ до какого-то порядка n. Приведем примеры таких уравнений:

$$y' + y - x^2 = 0, \quad y''' = \sin x, \qquad y'' + y = 0.$$

Уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно, называется **дифференциальным уравнением n-го порядка**.

Все приведенные выше уравнения являются дифференциальными, причем первое из них имеет порядок 1, второе – порядок 3, третье – порядок 2.

Дифференциальное уравнение n-го порядка записывают обычно в виде

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots\ ,\ y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

В дальнейшем слово «дифференциальное» будем часто опускать и говорить просто «уравнение (1)».

1.2. Решения дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения (1) называется любая функция $y = f(x)$, дифференцируемая по крайней мере n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение (1) последнее обращается в тождество**.**

Так, для дифференциального уравнения

$$y' - y = 0 \tag{2}$$

одним из решений является функция $\boldsymbol{y = e^x}$. Однако, это решение – не единственное: любая функция вида

$$y = Ce^x, \tag{3}$$

где C – постоянная, также является решением данного уравнения. Вскоре мы установим, что никаких других решений, кроме (3), данное уравнение не имеет. В этом смысле формула (3) определяет **общее решение** уравнения (2).

Поскольку в выражение (3) для y входит произвольная постоянная C, то говорят, что **множество решений уравнения (2) зависит от одной произвольной постоянной C.**

Придавая C определенное числовое значение, мы будем получать конкретные или, как говорят, **частные решения** уравнения (2).

В качестве другого примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' = 0. \tag{4}$$

Все решения этого уравнения могут быть найдены непосредственно. Из соотношения (4) находим $y' = C_1$ и далее

$$y = C_1 x + C_2. \tag{5}$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Обратно, при любых значениях постоянных C_1 и C_2 функция $y = C_1 x + C_2$ является решением уравнения (4). Таким образом, формула (5) определяет общее решение уравнения (4). Как видим, оно зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. При конкретных значениях C_1 и C_2 будем получать частные решения.

Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения в дальнейшем будут уточнены. Однако одно важное обстоятельство можно отметить уже сейчас, исходя из приведенных примеров. А именно: общее решение зависит от стольких произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Частные же решения получаются из общего при конкретных значениях этих постоянных.

Процесс отыскания решений дифференциального уравнения называют **интегрированием этого уравнения.**

В зависимости от контекста несколько расплывчатый термин «интегрирование» может означать либо отыскание общего решения, либо нахождение того или иного частного решения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Уравнение вида $y' = f(x, y)$ и его геометрический смысл.

Наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка есть

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

Если это уравнение разрешить относительно y', то оно запишется в виде

$$y' = f(x, y). \tag{6}$$

Такое уравнение мы и будем сейчас рассматривать.

Укажем, прежде всего, геометрический смысл уравнения (6). Возьмем какую-либо точку (x_0, y_0), принадлежащую области определения $\mathcal{D}$ функции $f(x, y)$. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (6), график которого проходит через эту точку (т.е. $y_0 = \varphi(x_0)$). Чтобы найти значение производной $\varphi'(x_0)$, совсем необязательно знать функцию $\varphi(x)$, так как согласно уравнению (6) должно выполняться равенство

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Таким образом, угловой коэффициент кривой $y = \varphi(x)$, проходящей через точку (x_0, y_0) и являющейся решением уравнения (6), равен (при $x = x_0$) числу $f(x_0, y_0)$.

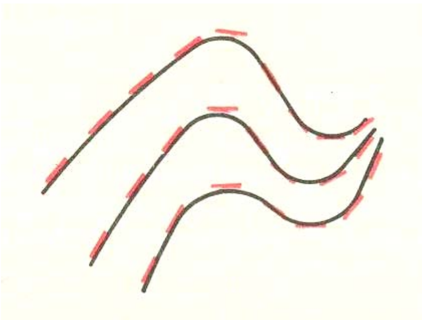

Рис. 1

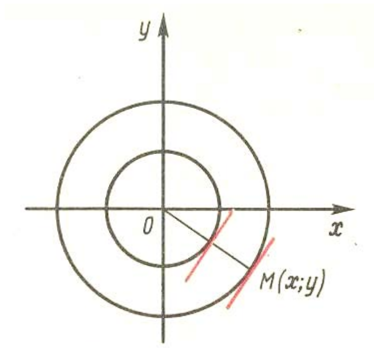

Рис. 2

Построим теперь для каждой точки (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$ прямую, проходящую через эту точку и имеющую угловой коэффициент, равный $f(x_0, y_0)$. Будем говорить, что эта **прямая задает направление в точке** (x_0, y_0).

Функция $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ тогда и только тогда является решением уравнения (6), когда ее график в каждой своей точке имеет значение в этой точке направление, т.е. касается прямой, построенной для этой точки.

Пусть $\mathcal{D}$ – множество точек на плоскости. Говорят, что на этом множестве задано **поле направлений,** если для каждой точки $M \in \mathcal{D}$ указана некоторая прямая $l(M)$, проходящая через эту точку.

Кривая γ которая в каждой своей точке M имеет направление поля (т.е. касается прямой $l(M)$), называется **интегральной кривой** данного **поля направлений.** В случае, когда поле направлений отвечает дифференциальному уравнению (6), кривая γ называется **интегральной кривой уравнения (6).**

Обычно вместо прямой $l(M)$ рисуют маленький отрезок («штрих»), проходящий через M. На рис. 1 изображены некоторое поле направлений и три интегральные кривые этого поля.

Пример 1. Описать геометрически поле направлений для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{7}$$

Решение

Правая часть уравнения определена на множестве $\mathcal{D}$, состоящем из всех точек (x, y), где $y \neq 0$**;** следовательно, уравнение задает на этом множестве поле направлений. Что касается точек, не принадлежащих $\mathcal{D}$, т. е. точек вида $(x, 0)$, то при $x \neq 0$ естественно считать, что и в таких точках уравнение задает определенное направление, а именно – направление, параллельное оси Oy (поскольку в этих точках $y' = \infty$). Таким образом, данное уравнение определяет поле направлений во всей плоскости, за исключением единственной точки $(0, 0)$. Это поле имеет простой геометрический смысл. Если $M(x, y)$ – точка, отличная от начала координат O, то прямая OM имеет угловой коэффициент $k = \frac{y}{x}$ перпендикулярная же ей прямая, проходящая через M, имеет угловой коэффициент – $k = -\frac{x}{y}$ что в силу (7) совпадает с y'. Таким образом, в каждой точке M, отличной от начала, направление поля перпендикулярно прямой OM (рис. 2).

Продолжим обсуждение примера. Из данного выше описания для направлений, соответствующего уравнению (7), ясно, что интегральные кривые поля представляют собой окружности с центром в начале координат, к тому же заключению придем, решая данное уравнение непосредственно:

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow yy' + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Мы получили уравнение вида $x^2 + y^2 = 2C,$ определяющее (при $C > 0$) окружность с центром в начале координат. В данном случае решение дифференциального уравнения привело к соотношению вида $F(x;y) = 0,$ определяющему $\boldsymbol{y}$ как функцию от x неявно.▲

2.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Мы уже отмечали, что дифференциальное уравнение имеет, как правило, бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества выделить какое-то конкретное решение, необходимо задать дополнительное условие.

Чаще всего такое условие ставится в форме следующей задачи, называемой **задачей Коши:**

Требуется найти решение $y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$ которое при заданном значении x_0 аргумента x принимает заданное значение y_0. Иначе говоря, требуется найти решение уравнения при **начальном условии** $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Ясно, что через каждую точку (x_0, y_0) должна проходить единственная интегральная кривая, т.е. задача Коши должна иметь единственное решение. Как правило, дело обстоит именно так. Однако возможны и такие случаи, когда задача Коши не имеет решения либо имеет не одно, а много решений. Чтобы гарантировать существование и единственность решения задачи Коши, следует подчинить функцию $f(x,y)$ некоторым ограничениям. Точная формулировка этих ограничений дается в следующей теореме Коши.

Теорема ***(о существовании и единственности решения задачи Коши).*** Если в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то существует такая окрестность точки (x_0, y_0), в которой задача Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$. имеет решение, и притом единственное.

Доказательство опускаем. ■

Пример 2. Применим теорему к уравнению

$$y' = \sqrt[3]{y^2}.$$

Здесь $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$. Функция f определена на всей плоскости Oxy, однако ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ определена и непрерывна лишь в точках, где $y \neq 0$. Согласно теореме Коши, для каждой такой точки (x_0, y_0) существует окрестность, в которой задача Коши с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$. имеет решение, и притом единственное. Более подробное обсуждение этого примера будет дано в п.п. 2.7 настоящего параграфа.

2.3. Уточнение понятий общего и частного решений.

Если задание начальной точки (x_0, y_0) определяет единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, то такое решение называется **частным решением.**

Иначе говоря, частное решение – это решение, однозначно определяемое начальным условием.

Множество всех частных решений называется **общим решением** дифференциального уравнения.

Обычно общее решение записывается в виде $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная. Задание начального условия позволяет определить значение постоянной C; она находится из равенства $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

В некоторых случаях процесс решения уравнения приводит не к явному выражению $y = \varphi(x, C)$ для общего решения, а к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющему y как неявно заданную функцию от x.

Общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$ называется соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ (где C – произвольная постоянная), из которого при различных значениях C получаются все частные решения уравнения.

Пример 3. Для уравнения $y' = y$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполняются во всей плоскости Oxy. Формула $y = Ce^x$ дает общее решение, так как любое начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$. удовлетворяется при подходящем выборе постоянной C. Действительно, для определения C имеем равенство $y_0 = Ce^{x_0}$ откуда $C = y_0 e^{-x_0}$. ▲

Пример 4. Для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены во всей плоскости, за исключением точек оси Ox (где $y = 0$). Выше мы установили, что общий интеграл имеет вид $x^2 + y^2 = C$. Каковы бы ни были числа x_0 и y_0, где $y_0 \neq 0$ существует такое значение постоянной C (а именно, $C = x_0^2 + y_0^2$), при котором функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2 + y^2 = C$ удовлетворяет условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$. ▲

В связи со сказанным можно внести некоторые уточнения в формулировку задачи о решении дифференциального уравнения. Слова «решить уравнение» обычно означают нахождение общего решения (или общего интеграла).

2.4. Уравнения с разделяющимися переменными. Наиболее простой тип дифференциального уравнения первого порядка – это уравнение вида

$$y' = f(x), \tag{8}$$

которое решается простым интегрированием обеих частей уравнения:

$$y = \int f(x)dx$$

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функция для $f(x)$, то общее решение запишется в виде $y = F(x) + C$.

Рассмотрим теперь одно важное обобщение уравнения (3) – так называемое **уравнение с разделяющимися переменными.** Это – дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)\,q(y), \tag{9}$$

где правая часть есть произведение функции от x на функцию от y (если функция $q(y)$ постоянна, то получается уравнение вида (8).

Запишем уравнение (9) в виде

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,q(y).$$

Предполагая, что в рассматриваемой области изменения величины $\boldsymbol{y}$ выполняется условие $q(y) \neq 0$ перепишем уравнение (9) следующим образом:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx. \tag{10}$$

Теперь левая часть содержит только y, а правая – только x, т.е. переменные, как принято говорить, разделены. Интегрируя обе части уравнения (10), получим

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx.$$

Если $Q(y)$ – какая-нибудь первообразная функция для $\dfrac{1}{q(x)}$, а $P(x)$ – первообразная для $p(x)$, то последнее равенство можно записать в виде соотношения $Q(y) = P(x) + C,$ дающего, таким образом, общий интеграл уравнения (9).

Замечания

1. Операция интегрирования обеих частей уравнения (10) нуждается в некотором обосновании, поскольку мы интегрируем, казалось бы, по разным переменным (левую часть по y, правую по x). Однако если интегрировать обе части, предполагая, что $y = y(x)$, то операция станет законной. В этом случае из (10) получаем

$$\int \frac{y' dx}{q(y)} = \int p(x)\, dx,$$

после чего от записи $\int \frac{y' dx}{q(y)}$ можно перейти к $\int \frac{dy}{q(y)}$ используя правило замены переменной в неопределенном интеграле.

2. Если ищется не общее, а частное решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$ то неопределенное интегрирование в (10) можно заменить определенным; тогда получим

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{q(y)} = \int_{x_0}^{x} p(x)\, dx.$$

3. Если при некотором значении y_0 имеем $q(y_0) = 0$, то отыскание решения $y(x)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, указанным выше методом невозможно. Однако в этом случае решением является функция $y(x)$, тождественно равная y_0. Действительно, тогда производная y' равна нулю, но и произведение $p(x)q(y_0)$ также равно нулю.

Пример5. Найти все решения уравнения $y' = y^2$.

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными. Предполагая $y \neq 0$, можем записать

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \qquad (11)$$

откуда следует $-\frac{1}{y} = x + C$ или $y = -\frac{1}{x+C}$. Это общее решение уравнения. К нему следует добавить решение $y = 0$ (потерянное при переходе к уравнению (11)). ▲

Пример 6. Решить уравнение $y' = \sin(x + y)$

Решение

Данное уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, но оно приводится к нему заменой неизвестной функции $y(x)$ на $u(x) = x + y(x)$. Тогда $u' = 1 + y'$ и уравнение принимает вид $u' - 1 = \sin u$ или $u' = 1 + \sin u$. Предполагая $1 + \sin u \neq 0$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{du}{1+\sin u} = dx. \qquad (12)$$

т.е. получим уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрируя обе части равенства (12), имеем

$$\int \frac{du}{1+\sin u} = x + C.$$

Чтобы найти интеграл, записанный слева, используем подстановку $tg\frac{u}{2} = v$. Получаем

$$t\int \frac{du}{1+\sin u} = \int \frac{2dv}{(1+v)^2} = -\frac{2}{1+v} = -\frac{2}{1+tg\frac{u}{2}}.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$-\frac{2}{1+tg\frac{u}{2}} = x + C.$$

Подставляя вместо функции u ее выражение $\boldsymbol{x+y}$, находим

$$x+\frac{2}{1+tg\,\frac{x+y}{2}}+C=0. \tag{13}$$

Это соотношение не охватывает тех решений y, для которых $1+\sin u=0$ или, что то же самое, $\sin(x+y)=-1$. Для таких решений имеем

$$x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad (k\in \mathbb{Z}).$$

Итак, данное уравнение имеет общий интеграл (13), а также решения

$$y=-x-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad (k\in \mathbb{Z}). \ ▲$$

К уравнениям с разделяющимися переменными сводится ряд других типов дифференциальных уравнений первого порядка. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

2.5. Однородные уравнения.

Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14}$$

правая часть которого зависит только от отношения $\frac{y}{x}$.

Чтобы решить уравнение (14), перейдем от неизвестной функции $y(x)$ к функции $u(x)=\frac{y(x)}{x}$. Тогда $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, и уравнение принимает вид

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u) \qquad \text{или} \qquad \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными, которое решается уже известным способом:

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

После нахождения $\boldsymbol{u(x)}$ следует вернуться к функции $y(x) = xu(x)$.

Замечание. Если существуют такие значения u, для которых $f(u) = u$, то к найденным решениям добавляются еще решения вида $u(x) = u_0$, т.е. $y = u_0 x$, где u_0 – любой из корней уравнения $f(u) = u$.

Пример 7. Решить уравнение $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$.

Решение

Это уравнение является однородным, так как

$$\frac{y+x}{y-x} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1} = \frac{u+1}{u-1},$$

где $u = \dfrac{y}{x}$. Для функции $\boldsymbol{u}$ имеем уравнение

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1} - u} = \frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \frac{(u-1)du}{-u^2+2u+1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2+2u+1\right| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln C,$$

где $C > 0$ (произвольную постоянную для интеграла $\int \dfrac{dx}{x}$ удобно записать в виде $-\dfrac{1}{2}\ln C$), затем

$$\left|-u^2+2u+1\right|^{-1/2} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{C}}$$

и, наконец,

$$x^2\left|1+2u-u^2\right| = C.$$

Знак модуля в последнем равенстве можно опустить вместе с ограничением на знак C. Возвращаясь к функции $y = xu$, получим

$$x^2+2xy-y^2=C. \qquad (15)$$

Это общий интеграл данного уравнения. Из полученного соотношения нетрудно выразить y через x и найти общее решение.

В данном примере существуют такие значения u, для которых $f(u)-u=0$; это корни уравнения $1+2u-u^2=0$, т.е. $u=1\pm\sqrt{2}$. Им соответствуют два решения $y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$, которые можно получить из соотношения (15) при $C=0$. ▲

2.6. Примеры применения дифференциальных уравнений в экономических исследованиях. С помощью дифференциальных уравнений решаются разнообразные задачи – физические, **экономические** и т.д. Укажем кратко общую схему решения задач с помощью дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти функцию $y=y(x)$, выражающую зависимость между двумя переменными величинами x и y. Зафиксируем значение x. Тогда любому приращению Δx будет отвечать определенное значение Δy. Зависимость Δy от Δx может носить в принципе сколь угодно сложный характер. Однако если ограничиться малыми значениями Δx, то эта зависимость приближенно является линейной, поскольку отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ близко к некоторому постоянному числу k (значению производной y', вычисленному в точке $\boldsymbol{x}$). Таким образом, имеем приближенное равенство $\Delta y\approx k\Delta x.$

Коэффициент пропорциональности k может быть найден из условий задачи, для чего следует воспользоваться известными законами физики, механики, геометрии, экономики и т.д. (в зависимости от характера задачи). Во многих случаях оказывается, что значение этого коэффициента определяется только значениями самих величин x и y, т.е. $k=f(x,y)$. Тогда для неизвестной функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Дальнейшая часть решения задачи оказывается уже чисто математической. Она сводится к нахождению общего решения $y = \varphi(x, C)$ (или общего интеграла) полученного уравнения, а затем – к выделению определенного частного решения, поскольку задача содержит обычно те или иные дополнительные условия (например, начальные условия задачи Коши).

Пример 8. Полные издержки K есть функция объема производства x. Найти функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений x равняются средним издержкам.

Из условия задачи следует, что

$$\frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \text{ или } \frac{dK}{K} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dK}{dK} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|K| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где

$$\ln|K| = \ln|Cx| + \ln C, \quad \text{или} \quad K = Cx,$$

и, наконец,

$$\frac{K}{x} = C.$$

Таким образом, средние издержки постоянны. ▲

Пример 9. Предположим, что продавец имеет в данный период времени некоторый объем товара, который в течение этого периода не увеличивается за счет производства. Например, торговец зерном закупил урожай после уборки и в течение последующего года продает закупленную партию зерна с недельными интервалами вплоть до нового урожая. При данных запасах недельное предложение будет зависеть от ожидаемой цены в наступающей неделе и от предполагаемой динамики цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается понижение цепы, а в последующие недели – повышение, то предложение будет сдерживаться, если ожидаемое повышение цен превышает издержки хранения. Предложение товара в ближайшую наступающую неделю будет тем меньшим, чем большее ожидаемое повышение цены. И наоборот, если торговец ожидает, что в течение наступающей недели цена будет высокой, а на следующей неделе она упадет, предложение увеличится тем больше, чем больше предполагаемое понижение цены.

Введем обозначение: цена товара в наступающей неделе – $p(t)$, тенденция формирования цены – $\frac{dp}{dt}$ (производная цены по времени). При данном запасе предложения для поступающей недели можно описать зависимостью:

$$x = \left(p, \ \frac{dp}{dt}\right).$$

Это так называемая **динамическая функция предложения.** ▲

Пример 10. Цена товара A вначале составляла 36, а через t недель – $p(t)$. Спрос определяется уравнением

$$q = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt},$$

а предложение

$$s = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt},$$

где q и s выражены в тыс. единиц.

Условие равновесие состоит в том, чтобы

$$120 - 2p + 5\frac{dp}{dt} = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt} \ ,$$

откуда

$$-45\frac{dp}{dt}=5p-150$$

и следовательно,

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{1}{9}(p-30),$$

откуда

$$\frac{dp}{p-30}=-\frac{1}{9}dt,$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{dp}{p-30}=-\int\frac{dt}{9}, \quad \text{или} \quad \ln|p-30|=-\frac{1}{9}t+\ln C,$$

откуда

$$\ln\left|\frac{p-30}{C}\right|=-\frac{1}{9}t, \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{p-30}{C}\right|=e^{-\frac{1}{9}t},$$

и, наконец,

$$p=Ce^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

Из условия задачи следует, что $p=36$ для $t=0$. Отсюда $36=Ce^0+30$, или $C=6$.

Следовательно, чтобы для каждого значения $\boldsymbol{t}$ сохранилось равновесие, цена товара A должна изменятся по формуле

$$p=6e^{-\frac{1}{9}t}+30. \ ▲$$

2.7. Понятие об особых точках и особых решениях дифференциального уравнения. В п. 2.2. была сформулирована теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y'=f(x,\ y)$. Условием, гарантирующим как существование решения, так и его единственность, является непрерывность функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. В отдельных точках это условие может нарушаться; через такие точки может не проходить ни одной интегральной кривой или проходить несколько интегральных кривых.

Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются **особыми точками** данного дифференциального уравнения.

Может случиться, что некоторая интегральная кривая уравнения состоит из одних особых точек. Такая кривая называется **особым решением** уравнения.

Пример 11. Для уравнения

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \tag{16}$$

функция $f(x,\ y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна на всей плоскости Oxy. Ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ существует и непрерывна во всех точках, где $y \neq 0,$ т.е. во всех точках, не принадлежащих оси Ox. Таким образом, через любую точку, не лежащую на оси Ox, проходит единственная интегральная кривая уравнения. Чтобы выяснить, как обстоит в этом смысле дело с точками оси Ox, проинтегрируем данное уравнение. Имеем

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx,$$

откуда следует $y^{1/3} + C = x$ или $y = (x - C)^3$.

Итак, общее решение представляет собой семейство кубических парабол. Однако имеется еще одно решение $y(x) = 0$. Следовательно, через любую точку $(C, 0)$ оси Ox проходят по крайней мере две интегральные кривые: ось Ox и парабола $y = (x - C)^3$. Это показывает, что точки оси Ox являются особыми точками уравнения (16), а функция $y \equiv 0$ – особым решение.

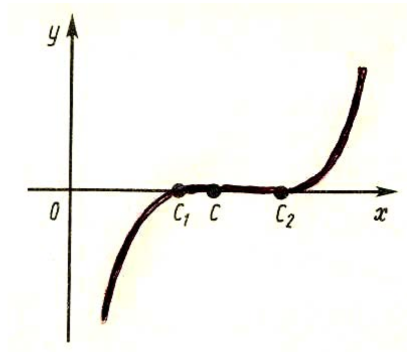

Рис. 3

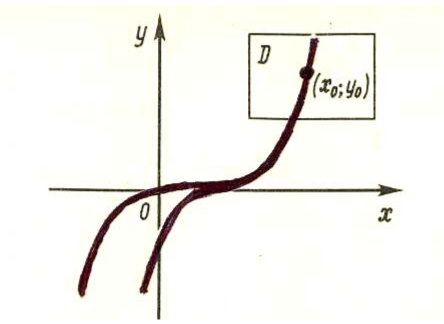

Рис. 4

Нетрудно установить, что через любую точку вида $(C,0)$ проходит в действительности бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить из трех кусков: «нижней» половины параболы $y=(x-C)^3$, где C_1 – число, меньшее или равное C (рис. 3), отрезка $[C_1, C_2]$ оси Ox, где $C_2 > C_1$, и «верхней» половины параболы $y=(x-C)^3$. ▲

Из этого примера можно понять, почему в формулировке теоремы Коши мы были вынуждены говорить о существовании и единственности решения лишь в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), а не во всей области существования функции $f(x,y)$. В самом деле, пусть точка (x_0, y_0) не является особой для уравнения (16), т.е. $y_0 \neq 0$. Если взять столь малую окрестность точки (x_0, y_0), чтобы она не пересекала ось Ox, то внутри такой окрестности через точку (x_0, y_0) будет проходить единственная кубическая парабола вида $y=(x-C)^3$. Однако если взять достаточно большую окрестность (например, всю плоскость Oxy), то окажется, что внутри такой окрестности через точку (x_0, y_0) проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить указанным выше способом из трех кусков, один из которых проходит через точку (x_0, y_0) (рис. 4).

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

3.1. Линейное уравнение первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ называется **линейным,** если его левая часть линейно зависит от y и y'.

Таким образом, линейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0.$$

Предполагая, что $\alpha(\boldsymbol{x}) \neq 0$, и разделив обе части на $\alpha(\boldsymbol{x})$ приведем уравнение к виду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{17}$$

где $p(x) = \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$, $\quad f(x) = -\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$.

Интегрирование уравнения (17) обычно проводят в два этапа. Сначала находят общее решение уравнения

$$y' + p(x)y = 0, \tag{18}$$

получаемого из уравнения (17) заменой функции $f(x)$, стоящей в правой части, нулем.

Уравнение (18) называется **линейным однородным**[*] уравнением, соответствующим уравнению (1); в противоположность этому само уравнение (17) называется (в случае, когда $f(x) \neq 0$) **неоднородным.**

После того как получено общее решение однородного уравнения, находят какое-либо частное решение $y_*(x)$, неоднородного уравнения (17). Тогда общее решение уравнения (17) можно получить с помощью следующей теоремы.

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения (17) есть сумма частного решения $y_*(x)$, этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (18).

---

[*] Не следует смешивать с однородным уравнением в смысле п. 2.5 .

Доказательство. Прежде всего, убедимся, что сумма $y_*(x)$, и любого решения $\boldsymbol{y}_0(\boldsymbol{x})$, однородного уравнения также является решением уравнения (17). Положим $y(x) = y_0(x) + y_*(x)$. Тогда

$$y' + p(x)y = (y_0' + y_*') + p(x)(y_0 + y_*) =$$
$$= (y_0' + p(x)y_0) + (y_*' + p(x)y_*) =$$
$$= 0 + f(x) = f(x),$$

что и требовалось установить.

Теперь остается показать, что всякое решение $y(x)$ неоднородного уравнения есть сумма $y_*(x)$, и некоторого решения $y_0(x)$, однородного уравнения; иначе говоря, что разность $y(x) - y_*(x)$ является решением однородного уравнения. Имеем

$$(y - y_*)' + p(x)(y - y_*) =$$
$$= (y + p(x)y) - (y_*' + p(x)y_*) = f(x) - f(x) = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Решим однородное уравнение (18). Оно представляет собой уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

и его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-P(x)}, \tag{19}$$

где $P(x)$ обозначает одну из первообразных для функции $p(x)$.

Теперь найдем частное решение уравнения (17). Воспользуемся для этого приемом, который называется **вариацией произвольной постоянной**. А именно, будем искать решение $y_*(x)$, уравнения (17) в виде произведения:

$$y_*(x) = u(x)e^{-P(x)},$$

которое получается из (19) заменой постоянной C некоторой функцией $u(x)$ (отсюда и название «вариация произвольной постоянной»). Подставляя это выражение для $y_*(x)$, в уравнение (17), для неизвестной функции $\boldsymbol{u(x)}$ получим уравнение

$$u'e^{-P(x)} - uP'(x)e^{-P(x)} + p(x)ue^{-P(x)} = f(x).$$

Поскольку $P'(x) = p(x)$, второе и третье слагаемое в левой части взаимно уничтожаются, и для функции u получается уравнение

$$u'e^{-P(x)} = f(x) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = f(x)e^{P(x)},$$

из которого следует $\boldsymbol{u(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx}$ (одна из первообразных).

Пример 12. Решить уравнение

$$y' - 2xy = 2x. \tag{20}$$

Решение

Это линейное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y' - 2xy = 0$. Решая его, получаем

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx, \tag{21}$$

откуда

$$\ln|y| = x^2 + \ln C,\ \ (C > 0); \qquad y = \pm Ce^{x^2} = Ae^{x^2}.$$

где постоянная A может быть как положительной, так и отрицательной или нулем (случай $A = 0$ позволяет учесть решение $\boldsymbol{y = 0}$, потерянное при переходе к уравнению (21)).

Теперь находим частное решение $y_*(x)$, исходного уравнения в виде произведения:

$$y_*(x) = u(x)e^{x^2} = u(x)\,y_0(x),$$

где $y_0(x) = e^{x^2}$. Подставляя это выражение для $y_*(x)$, в уравнение (20), получим

$$u'y_0 + uy_0' - 2xy_0u = 2x$$

откуда, учитывая, что $y_0' - 2xy_0 = 0,$ находим

$$u' = 2xe^{-x^2}.$$

Следовательно, $u = -e^{-x^2}$ (берем частное решение). Итак,

$$y_*(x) = -e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -1$$

(заметим, что это частное решение уравнения (20) можно было обнаружить непосредственно). Теперь на основании теоремы находим общее решение уравнения (20). Оно записывается в виде $y_*(x) + Cy_0(x),$ т.е. в виде $y(x) = -1 + Ce^{x^2}.$ ▲

3.2. Уравнение Бернулли. Метод, использованный выше для решения линейного уравнения, позволяет решать и некоторые нелинейные уравнения. В частности, с его помощью решается уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{22}$$

называемое **уравнением Бернулли.**

Как и выше, сначала находим какое-нибудь решение $y_0(x)$ однородного уравнения $y' + p(x)y = 0;$ затем полагаем $y(x) = u(x)y_0(x).$ Подставляя это выражение в уравнение (22), для функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'(x)y_0(x) = q(x)\,u^n(x)\,y_0^n(x),$$

которое решаем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u^n} = q(x)\,y_0^{n-1}(x)\,dx.$$

Пример 13. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2e^{2x}. \tag{23}$$

Решение

Сначала находим решение уравнения $y' + 2y = 0.$ В качестве такого решения можно взять функцию $y_0(x) = e^{-2x}.$ Затем полагаем $y(x) = e^{-2x}u(x).$

$y(x) = e^{-2x}u(x).$ Подставляя это выражение в уравнение (23), получаем

$$e^{-2x}u' = e^{-4x}e^{2x}u^2 \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = 1,$$

откуда $\frac{1}{u} = -x + C$, или $u = \frac{1}{-x+C}$. Окончательно имеем

$$y(x) = u(x)y_0(x) = \frac{e^{-2x}}{C-x}. \ \blacktriangle$$

Упражнения

1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y = (x+C)e^x$, $\quad y' - y = e^x$; б) $y = -\frac{2}{x^2}$, $\quad xy^2dx - dy = 0$;

в) $x^2 - xy + y^2 = C$, $\quad (x-2y)y' - 2x + y = 0$. ►

2. Решить задачу Коши:

а) $y' = \sin 5x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $\frac{dx}{dt} = 3$, $\quad x = 1$ при $t = -1$. ►

3. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых:

а) $y = Cx^2$;

б) семейство парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью абсцисс. ►

4. Дано дифференциальное уравнение $y' = x^2$. Построить поле направлений. ►

5. Решить уравнение $(x - xy^2)dx + (y - yx^2)dy = 0$. Имеет ли оно особые решения. ►

6. Найти частное решение уравнения $ydx + ctgxdy = 0$, $\quad y\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1$. ►

7. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

а) $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$; б) $y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}$, $\quad y(-1) = 1$;

в) $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$. ►

8. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' + (tgx)y = \dfrac{1}{\cos x}$;   б) $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$;   в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$. ►

9. Решить задачу Коши:

$$e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos y) = 0, \quad y(\ln 2) = 0. \ ►$$

10. Решить уравнение $\dfrac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$. ►

Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциальным уравнением n-го порядка? В каком виде записывают дифференциальное уравнение n-го порядка? Приведите примеры дифференциальных уравнений.

2. Что называется решением дифференциального уравнения? С помощью простейших примеров разъясните понятие общего и частого решений.

3. Какой процесс называют интегрированием дифференциального уравнения? Что может означать термин «интегрирование»?

4. Приведите наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка.

5. Приведите вид дифференциального уравнения первого порядка разрешенный относительно y'. Укажите геометрический смысл этого уравнения.

6. Когда говорят, что на некотором множество точек на плоскости задано поле направлений?

7. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?

8. Приведите формулировку постановки задачи Коши для уравнения первого порядка разрешенной относительно производной. Что называется начальным условием?

9. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка разрешенной относительно производной.

10. Дайте (уточненные) определения понятий общего и частного решений.

11. Что называется общим интегралом уравнения?

12. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

13. К уравнениям с разделяющимися переменными сводится ряд других типов дифференциальных уравнений первого порядка. Перечисляйте некоторые из них.

14. Что называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Каким образом оно приводится уравнение с разделяющимися переменными?

15. С помощью дифференциальных уравнений решаются разнообразные задачи – физические, экономические и т.д. Приведите краткую общую схему решения задач с помощью дифференциальных уравнений и примеры применения дифференциальных уравнений в экономических исследованиях.

16. Какие точки называются особыми точками данного дифференциального уравнения?

17. Что называется особым решением дифференциального уравнения?

18. Какое дифференциальное уравнения первого порядка называется линейным? Приведите два примера.

19. Какое линейное уравнение называется однородным? Какое линейное уравнение называется неоднородным?

20. Как можно получить общее решение неоднородного уравнения? Сформулируйте теорему.

21. Как находят частное решение неоднородного уравнения? Что называется вариацией произвольной постоянной?

22. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Как его решают?